909. 群トソノ lattice ニツイテ

岩澤　健吉（紹）

任意ノ群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキニソノ部分群ノ全体ハ普通ノ意味デ lattice ヲツクリマス。即チ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ部分群トスルトキ $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ トシテハ $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トカラ生成サレタ群ヲ, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ トシテハ $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トノ Durchschnitt ヲトレバコレラ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, ----- ノ全体ガ lattice ニナルコトハ明白デアリマス。コレヲ $\mathfrak{G}$ ニ属スル lattice $L(\mathfrak{G})$ ト呼ブコトニスレバ $L(\mathfrak{G})$ ノ構造ハ勿論 $\mathfrak{G}$ ノ構造ニヨリ決定サレルワケデアリマスガ逆ニ $L(\mathfrak{G})$ ノ lattice トシテノ構造ガ $\mathfrak{G}$ ノ（群トシテノ）構造ニドレホドノ影響ヲ與ヘルデアラウカト云フ問題ガ起リマス。

例ヘバ $L(\mathfrak{G})$ ガ modular lattice デアルトキハ $\mathfrak{G}$ ハドンナ制限ヲ受ケルカト云フ様ナコトデス。$\mathfrak{G}$ ガ有限群デアル時ニハコノ様ナ問題ハ，可成手數ガカヽッテ面倒デハアリマスガ，トニカク種々ノ場合ニ解答ガ與ヘラレルヤウデアリマスガ[1] $\mathfrak{G}$ ヲ一般ニ無限群トシマスト無限群ノ群論自身ガ有限群論ニ比ベテズットオクレテヰル今日，仲々困難ガ多イ様デアリマス。

以下ニオキマシテハ、ゴク簡單ナ場合即チ $L(\mathfrak{G})$ ガ distributive ニナル様ナ場合ニ於ケル $\mathfrak{G}$ ノ構造ヲ調ベテ見タイト思ヒマス。先ヅ $L(\mathfrak{G})$ ガ distributive lattice ナラバ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群及ビ factor group ニ属スル

lattice モ distributive ニナルコトハ明ラカデアリマス。一番簡單ナD-group（以下 $L(\mathfrak{G})$ ガ distributive ニナル様ナ $\mathfrak{G}$ ヲコノ様ニ呼ブコトニシマス）トシテ

Lemma 1. cyclic group ハ凡テ D-group デアル。

證明. $\mathfrak{G}=\{A\}$ ヲ無限次ノ cyclic group トシマス. $\mathfrak{a}=\{A^l\}$, $\mathfrak{b}=\{A^m\}$, $\mathfrak{c}=\{A^n\}$ トシテ

$$\mathfrak{a}\cup(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c})$$

ガ成立スルコトヲ云ヘバヨイワケデスガ、コレハ次ノ初等整數論的關係ニ他ナリマセン。

即チ（ , ）, { , } ニヨツテソレゾレ最大公約數, 最小公倍數ヲ表セバ

$$(l,\{m,n\})=\{(l,m),(l,n)\}$$

有限次ノ Cyclic group ハ上記 $\{A\}$ ノ factor group デスカラ勿論 D-group ニナリマス。（證終）

コレヲ用ヒテ

Lemma 2. 有理數全体ノ加法群ヲRトスレバRハD-group デアル。

證明. $\mathfrak{a}\cup(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})\supseteq(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c})$ ヲ云ヘバ十分デアリマス。コノ右辺ニ含マレル任意ノ數ヲ X トスレバ

$X=A+B=A'+C$, $A,A'\in\mathfrak{a}$, $B\in\mathfrak{b}$, $C\in\mathfrak{c}$.

$\bar{\mathfrak{a}}=\{A,A'\}$, $\bar{\mathfrak{b}}=\{B\}$, $\bar{\mathfrak{c}}=\{C\}$ トスレバ $\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}},\bar{\mathfrak{c}}$ ハ $\{A,A',B,C\}$ ノ部分群デ後者ハ Cyclic group，從ツテ lemma 1 ニヨリ D-group デスカラ

$$\bar{\mathfrak{a}}\smile(\bar{\mathfrak{b}}\frown\bar{\mathfrak{c}})=(\bar{\mathfrak{a}}\smile\bar{\mathfrak{b}})\frown(\bar{\mathfrak{a}}\smile\bar{\mathfrak{c}})$$

ヨツテ

$$\mathfrak{a}\smile(\mathfrak{b}\frown\mathfrak{c})\supseteq\bar{\mathfrak{a}}\smile(\bar{\mathfrak{b}}\frown\bar{\mathfrak{c}})=(\bar{\mathfrak{a}}\smile\bar{\mathfrak{b}})\frown(\bar{\mathfrak{a}}\smile\bar{\mathfrak{c}})\ni X$$

即チ

$$\mathfrak{a}\smile(\mathfrak{b}\frown\mathfrak{c})\supseteq(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b})\frown(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{c}).$$ （証終）

次ニ $\mathfrak{G}$ ヲ任意ノ D-group トシ A, B ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ Element トシマス。先ヅ

$$\{A\}\frown\{B\}=1$$

トスレバ

$$\mathfrak{a}=\{AB\},\quad \mathfrak{b}=\{A\},\quad \mathfrak{c}=\{B\}$$

トオイテ

$$\{AB\}=\mathfrak{a}\smile(\mathfrak{b}\frown\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b})\frown(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{c})=\{A,B\}$$

即チ $\{A,B\}$ ハ cyclic ニナリマス。一般ニ $\{A\}\frown\{B\}=\mathfrak{D}$ トオケバ $\mathfrak{D}$ ハ $\{A,B\}$ ノ Zentrum ニ属シ $\{A,B\}/\mathfrak{D}$ ハ今証明シタコトニヨリ cyclic ニナリマスカラ、從ツテ $\{A,B\}$ ハ abel 群ニナリマス。ヨツテソノ base ヲトツテ $\{A,B\}=\{A_1\}\times\cdots\cdots\times\{A_r\}$ トスレバ $\{A\}\frown\{B\}=1$ ナル場合ノ考察ヲ $\{A_1\},\{A_2\},\cdots\cdots,\{A_r\}$ ニツイテ繰返シテ $\{A,B\}=\{A_1A_2\cdots\cdots A_r\}$ ヲ得マス。即チ $\{A,B\}$ ハ常ニ cyclic ニナリマス。ヨツテ A, B ノ order ハ共ニ無限デアルカ共ニ有限デアルカデアリマス。

又 $\mathfrak{G}$ ガ abel 群デアルコトモコレデワカリマシタ。ソコデ先ヅ $\mathfrak{G}$ ノ Element ノ order ガ凡テ有限デアル場合ヲ考察スルコトニシマス。任意ノ自然数 m ニ對シ order

m ナル $\mathfrak{G}$ ノ部分群ハ高々一ツデアリマスカラ $\mathfrak{G}$ ノ Element ノ數ハ高々 abzählbar デアリマス。ヨッテコレヲ

$$1 = A_0, A_1, A_2, \text{-----}, A_n, \text{-----}$$

トシマス。サテ $\mathfrak{G}$ ハ次ノ樣ニシテ $\mathfrak{R}_1$（有理數ノ加法群 R ヲ mod 1 デ reduce シタモノ）ノ部分群ニ isomorph ニ寫像サレマス。先ヅ $A_0 = 1$ ニハ勿論 0 ヲ對應サセマス。A_1 ノ Order ガ m_1 ナラバ A_1 ヲ $\frac{1}{m_1}$ ニ對應サセマス。$\{A_0, A_1, A_2\}$ ハ cyclic デアリマスガ $\{A_0, A_1\}$ ノ $\{A_0, A_1, A_2\}$ ニ於ケル index ヲ m_2 トシ $B_2^{m_2} = A_1$ トナル樣ナ $\{A_0, A_1, A_2\}$ ノ Erzeugende $B_2 = \frac{1}{m_1 m_2}$ ヲ對應サセマス。

以下同樣ニ $B_3^{m_3} = B_2$, $\{B_3\} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ナル $B_3 = \frac{1}{m_1 m_2 m_3}$ ヲ對應サセル-----。コレガ Isomorphie ヲ與ヘルコトハ明カデアリマス。即チ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{R}_1$ ノアル部分群ト Isomorph ニナリマス。次ニ $\mathfrak{G}$ ノ Element ノ order ガ（1以外ハ）凡テ無限デアル場合ヲ考ヘマス。$A \neq 1$ ヲ任意ニトレバ最初ノ考察カラ $\mathfrak{G}/\{A\}$ ノ Element ハ凡テ有限ノ order ヲ持ツコトガワカリマスカラ今證明シタコトニヨリ $\mathfrak{G}/\{A\}$ ハ R_1 ノ部分群ニ isomorph デアリマス。ヨッテ特ニコノ場合モ $\mathfrak{G}$ ノ Element ノ數ハ abzählbar デアリマスカラ前ト全樣ニ

$$A_0 = 1, A_1, A_2, \text{-----}$$

トシマス。

今度ハ $\mathfrak{G}$ ヲ R ノ内ニ次ノ様ニ對應サセマス。先ヅ $A_0=1$ ニハ 0 ヲ A_1 ニハ 1 ヲ對應サセマス。$B_2^{m_2}=A_1$, $\{B_2\}=\{A_1, A_2\}$ ナラバ $B_2=\frac{1}{m_2}$ ヲ對應サセ以下前ト全ク同ジ様ニスレバ矢張リ Isomorphie ガ得ラレマス。

即チ以上ノ結果ヲマトメレバ D-group $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{R}$ 又ハ $\mathfrak{R}_1$ ノアル部分群ト isomorph デナケレバナラヌコトガワカリマシタ。然シ逆ニコノ様ナ群ガ D-group ニナルコトハ lemma 2 ニヨリ R ガ先ヅ D-group デアリ $\mathfrak{R}_1$ ハ R ノ factor group デアリマスカラ明白デアリマス。
ヨッテ次ノ定理ヲ得マス。

定理1. 群 $\mathfrak{G}$ ガ D-group ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ R 又ハ $\mathfrak{R}_1$ ノ部分群ト isomorph ニナルコトデアル。

系1. 有限群 $\mathfrak{G}$ ガ D-group ナルタメニ必要且十分ナル條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ cyclic ナルコトデアル。

系2. $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{R}_1$ ノ任意ノ部分群トスレバ $\mathfrak{R}_1$ ハ $\mathfrak{N}^* \simeq \mathfrak{R}_1/\mathfrak{N}$ ナル部分群 $\mathfrak{N}^*$ ヲ含ム。

證明. $\mathfrak{R}_1/\mathfrak{N}$ モ亦 D-group ダカラ

又上ノ定理カラ次ノコトヲ容易ニ證明出來マス。

定理2. 群 $\mathfrak{G}$ ニ屬スル $L(\mathfrak{G})$ ガ Boolean algebra ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{R}_1^0$ ノ部分群ト isomorph ナルコトデアル。但シ $\mathfrak{R}_1^0$ トハ $\mathfrak{R}_1$ ノ部分群デ, $\frac{1}{p}$ (p: 凡テノ素數) ノ全体カラ erzeugen サレタ群デアル。

—— 終 ——

(著者脚註)

1) 例ヘバ $L(g)$ ガ "ausgeglichen" ナル lattice 又ハ modular lattice ノ場合等。